Ägyptisches Rechnen

Eine kleine Einführung in die Rechenkunst der Ägypter

Mit Beispielen aus dem Papyrus Rhind und dem Papyrus Moskau in Hieroglyphenschrift

Ausgearbeitet von Georg Heinrichs

V_07_11_23

Inhalt

Einleitung

Bei den alten Hochkulturen Mesopotamiens und Ägyptens bildeten sich schon recht früh komplexe Rechenverfahren aus. Ganz bewusst spreche ich hier von *Verfahren*, denn die überlieferten Quellen zeigen im Wesentlichen nur den Weg zum Ergebnis; eine tiefer gehende Reflexion, wie sie etwa im antiken Griechenland viele Jahrhunderte später begonnen wurde, ist nur selten zu erkennen. Bei den Ägyptern wurden die Rechenverfahren in erster Linie benutzt

- bei der Buchführung von Palästen und Tempelgütern,
- bei der Zuteilung von Brot- und Bier-Rationen für die Arbeiter (Damit wurden üblicherweise die Löhne bezahlt.),
- bei der Aufteilung von Geländen (Nach der Nilflut war meist eine neue Zuteilung erforderlich.),
- bei der Planung von Gebäuden, Statuen und Bildern.

In diesem Skript sollen zunächst das ägyptische Zahlensystem und einige grundlegende Rechenverfahren für natürliche (d. h. ganze positive) Zahlen dargestellt werden. Danach werden wir zeigen, wie die Ägypter mit Brüchen umgegangen sind. Von entscheidender Bedeutung ist hier, dass die Ägypter im Wesentlichen nur Stammbrüche (d. h. Brüche, deren Zähler 1 ist) kannten.

An einigen Stellen hat es sich angeboten, Aufgaben aus dem Papyrus Rhind und dem Papyrus Moskau vorzustellen. Im Original sind sie in hieratischer Schrift verfasst; hier werden sie hieroglyphisch wiedergegeben. Dabei folgt dem Hieroglyphentext stets die Angabe von weniger geläufigen Vokabeln (Zahlen bei diesen Angaben verweisen auf die Seitenzahl in [4].), eine Transliteration (inkl. grammatischer Erläuterungen) und eine Übersetzung.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und viel Spaß bei der Lektüre von „**Ägyptisches Rechnen**“.

Georg Heinrichs

Felsinschrift aus dem dritten Jahrtausend v. Chr.

Das ägyptische Zahlensystem ist wie das heute von uns benutzte Zahlensystem ***dezimal***; darin unterscheidet es sich z. B. von dem römischen und dem babylonischen System. Allerdings handelt es sich um ***kein Stellenwertsystem*** (wie wir es heute benutzen); vielmehr werden die Einer, die Zehner, die Hunderter u.s.w. durch verschiedene Zeichen dargestellt:

Einer werden durch einen senkrechten Strich (Z1) dargestellt: 𓏺 (*wꜥ*),

Zehner durch eine Fesselklammer (V20): 𓎆 (*mḏ*)

Hunderter durch eine Schnurrolle (V1, nicht zu verwechseln mit Z7!): 𓍢 (*š.t*)

Tausender durch eine Lotus-Pflanze (M12): 𓆼 (*ḫꜣ*)

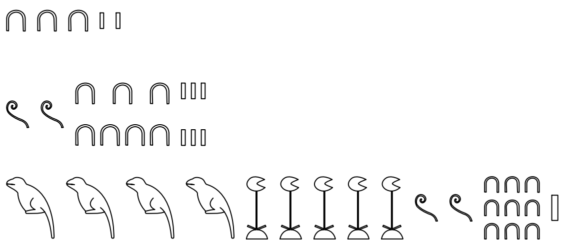
Zehntausender durch einen Finger (D50): 𓂭 (*ḏbꜣ*)

Hunderttausender durch eine Kaulquappe (I8): 𓆐 (*ḥfn*)

Millionen durch einen Gott mit erhobenen Armen und Palmrispe auf dem Kopf (C11): 𓁨 (*ḥḥ*)

Das Zeichen für eine Million konnte auch für unbestimmte „sehr große“ Zahlen stehen.

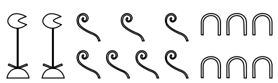
Vielfache der Einheit wurden dargestellt, indem das zugehörige Zeichen entsprechend oft wiederholt wurde. Dabei sorgte der Schreiber mit einem Zeilenwechsel dafür, dass in der Regel nicht mehr als 4 gleiche Zahlzeichen nebeneinander stehen. Zahlzeichen mit einem höheren Wert stehen gewöhnlich vor den Zahlzeichen mit einem niedrigeren Wert:



Hier sind die Zahlen 32, 276 und 405291 dargestellt; bei den hohen Lotus-Hieroglyphen wurde die oben erwähnte Regel gebrochen .

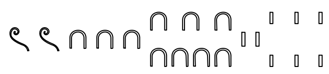
Multiplikation mit 10

Da die ägyptischen Zahlen in einem Zehnersystem dargestellt sind, ist die Multiplikation mit 10 einfach: Die einzelnen Zahlzeichen müssen dazu nur durch das Zahlzeichen der nächst höheren Einheit ersetzt werden. Bei unserem zweiten Beispiel erhalten wir als Ergebnis einer solchen Multiplikation:

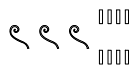


Addition zweier Zahlen

Auch die Addition zweier Zahlen ist recht einfach. Als Beispiel betrachten wir die Addition der Zahlen 32 und 276 (s. o.). Dazu schreiben wir von beiden Zahlen die Zeichen mit demselben Stellenwert nebeneinander. Zunächst erhalten wir:

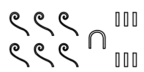


Hier stellen fest, dass es insgesamt zehn ∩-Zeichen gibt; das entspricht aber der Zahl 100. Wir ersetzen diese zehn Zeichen durch ein weiteres ⸮-Zeichen (Übertrag) und erhalten schließlich als Ergebnis die Zahl 308:



Multiplikation mit 2 (Verdopplung einer Zahl)

Auch die Multiplikation mit 2 ist nicht schwierig; dazu verdoppeln wir jeden Stellenwert und beachten dabei einen möglichen Übertrag. (Letztlich wird die zu multiplizierende Zahl nur zu sich selbst addiert. Mit anderen Worten: Wir können diese Multiplikationsaufgabe auch auf eine Addititionsaufgabe zurückführen.) Als Beispiel schauen wir uns die Aufgabe 308 mal 2 an: 2 mal 8 Einer ergeben 16 Einer, also 1 Zehner und 6 Einer. Dazu kommen jetzt noch die 2 mal 3 Hunderter. Das Ergebnis ist:



Die Ägypter führten die Multiplikation auf die im letzten Kapitel bereits behandelten einfachen Grundoperationen Verdoppeln und Addieren zurück. Wie sie dabei vorgingen, wollen wir zunächst an einem Beispiel zeigen. Zum einfacheren Verständnis des Rechenprinzips schreiben wir die Zahlen dabei in unserem dezimalen Stellenwertsystem.

Die Zahlen 13 und 3 sollen multipliziert werden. Es gilt also, das 13-fache von 3 zu finden. Dazu benutzten die Ägypter folgendes Schema:

Ziel: 13		
1	3	●
2	6	
4	12	●
8	24	●
13	**39**	

Unter die Kopfzeile schrieben die Ägypter zunächst das 1-Fache von 3. Dann wurden diese beiden Werte 1 und 3 von Zeile zu Zeile schrittweise verdoppelt: In der ersten Spalte stehen dann die Zahlen 1, 2, 4… und in der zweiten Spalte steht dann das 1-fache, das 2-fache, das 4-fache… von 3. Bei dem 8-fachen beendet man das Verdoppeln, weil im nächsten Schritt schon das 16-fache stehen würde; das ist aber schon größer als das 13-fache.

Nun werfen wir einen Blick auf die erste Spalte: Welche dieser Zahlen ergeben in der Summe 13? Wir markieren die entsprechenden Zeilen mit einem Punkt (●). Jetzt brauchen wir nur noch die markierten Zahlen aus der zweiten Spalte addieren, und schon haben wir das Ergebnis.

Wie wir sehen, haben wir nichts anderes gemacht als Verdoppeln und Addieren. Natürlich kann man die Faktoren auch vertauschen; die Multiplikationstabelle ist dann sogar einfacher:

Ziel: 3		
1	13	●
2	26	●
3	**39**	

Für die Funktionsweise dieses Rechenverfahrens ist entscheidend, dass sich jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen $1= 2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$, $8=2^3$, … schreiben lässt. In der Tat stellt die Folge der markierten (●) und nicht markierten (○) Zeilen aus der ersten Tabelle die Zahl 13 als Binärzahl dar: ● ● ○ ● = 1101_2

Nachdem wir das Prinzip jetzt kennen, betrachten wir nun ein etwas schwierigeres Beispiel: Wir wollen das Produkt von 35 und 52 berechnen.

Ziel: 35		
1	52	●
2	104	●
4	208	
8	416	
16	832	
32	1664	●
35	**1820**	

Eine **Division** können wir nun durchführen, indem wir das Verfahren von der Multiplikation umkehren. Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel. 207 soll durch 23 geteilt werden. Die Frage ist hier also: Das Wieviel-Fache von 23 ist 207? Die Tabelle dazu sieht dann so aus:

	Ziel: 207	
1	23	●
2	46	
4	92	
8	184	●
9	**207**	

Diesmal hören wir bei 184 (also beim 8-fachen) auf, weil bei einer weiteren Verdopplung die Zahl 207 überschritten würde. Wir markieren die 8-fach-Zeile. Jetzt schauen wir uns die darüber liegende Zeile an: Ist die Summe von 184 und 92 kleiner oder gleich 207? Nein, also markieren wir diese Zeile nicht. Ähnliches gilt für die darüber liegende Zeile. Addieren wir hingegen 23 zu 184, erhalten wir die Zahl 207; das Ergebnis der Division ergibt sich dann aus den Zahlen der ersten Spalte, die markiert wurden: 1 + 8 = 9.

Schauen wir uns noch eine schwierigere Divisionsaufgabe an: 1170 : 45

	Ziel: 1170	
1	45	
2	90	●
4	180	
8	360	●
16	720	●
26	**1170**	

Dass sich in diesen beiden Beispielen der Quotient genau als Summe von einigen der darunter stehenden Zahlen darstellen lässt, ist natürlich darauf zurückzuführen, dass bei unseren bisherigen Aufgaben die Division „aufgeht“, d. h. kein Rest übrig bleibt. Bei der Aufgabe 1182:45 hätten wir die gleichen Summanden 720, 360 und 90 gefunden; es wäre aber ein Rest von 12 übrig geblieben: Das Ergebnis wäre damit „26 Rest 12“. Im Kapitel 7 und den folgenden Kapiteln werden wir darlegen, wie man diesen Rest durch einen „ägyptischen Bruch“ darstellen kann.

Bei dem Papyrus Rhind handelt es sich um den umfangreichsten Papyrus mit mathematischem Inhalt. Er wurde in Theben gefunden und 1858 von dem Archäologen Henry Rhind erworben. Heute ist er im Britischen Museum ausgestellt. Auf der Webseite [1] kann man dieses Dokument mit zahlreichen Teilaufnahmen in hoher Auflösung betrachten.

Der Papyrus wurde ca. 1650 v. Chr. (also während der Zeit, als die Hyksos in Nordägypten herrschten) geschrieben. Der Schreiber namens Ahmose (s. u.) stützte sich dabei auf ältere Quellen, vermutlich aus der Zeit von Amenemhet III.

Der Papyrus Rhind behandelt sowohl arithmetische als auch geometrische Probleme. Diese sind meist praktisch orientiert. So geht es hier z. B. um das Aufteilen von Brotrationen an Arbeiter (Der Lohn wurde mit Waren wie Brot und Bier ausgezahlt!) oder der erneuten Einteilung von Feldflächen nach einer Nilflut. Daneben gibt es aber auch Untersuchungen zur geometrischen Reihe und zur Flächenberechnung eines Kreises.

Der Text ist - wie damals üblich - in hieratischer Schrift geschrieben. Um dem Leser die Möglichkeit zu geben, die eine oder andere Passage des Papyrus selbst in ägyptischer Sprache zu studieren, gebe ich sie hier (und im Folgenden) in Hieroglyphenschreibweise wieder. Dabei greife ich auf die Quellen [2] und [3] zurück.

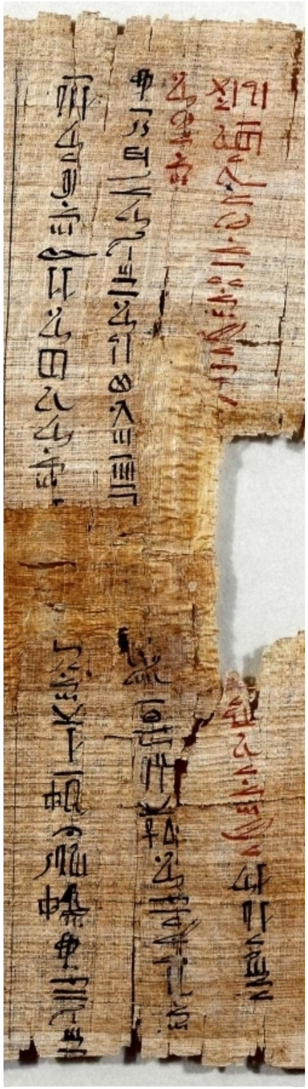
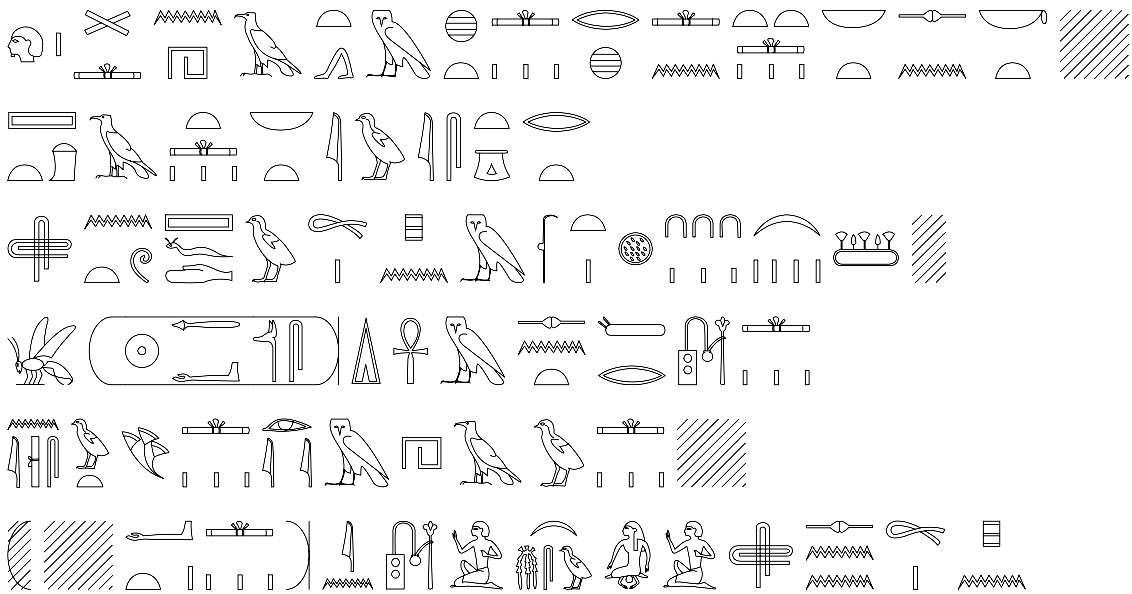
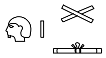
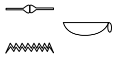
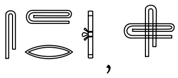
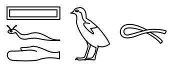
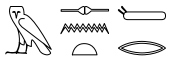
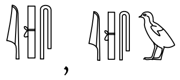
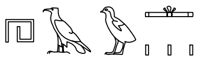
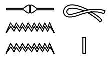


Abb. 1: Vorwort

Hieroglyphentext des Vorworts (nach [2])



Vokabeln

	*tp-ḥsb*	Berechnung (603, 1000)
	*hꜣj*	herabsteigen, betreten (517)
	*snk*	dunkel sein (782)
	*štꜣ*	geheim (907)
	*spẖr*	kopieren (751)
	*šfdw*	Papyrusrolle (884)
	*m-sn.t-r*	nach Art von (771)
	*js, js.w*	alt, die Alten (114)
	*hꜣw*	Zeit (518)
	*jn + Nomen + Partizip*	Es ist …, der …(Spaltsatz)
	*snn*	Aktenstück, Verzeichnis (779)

Transkription mit grammatischen Hinweisen

tp-ḥsb n hꜣj.t (Infinitiv) *m ẖ.wt rḫ nt.t nb.t snk.t* (fem. Partizip Aktiv) *štꜣ.t nb.t jw jst grt*

spẖr.n=tw šfdw pn m rnp.t zp 33 *ꜣbd* 4 *ꜣḫ.t* [*ẖr ḥm n njswt*] *bjt*(*j*) *ꜣꜥ-wsr-Rꜥ dj ꜥnḫ*

m-sn.t-r zš.w n js.w jry (Partizip Passiv) *m ḥꜥw* [*…nj-m*]*ꜣꜥ.t*[*-Rꜥ*] *jn zš Jꜥḥms*(*j*)*.w spẖr snn pn*

Übersetzung

Berechnung vom Eindringen in die Dinge, das Wissen von allem, das existiert (wörtlich: ist) und dunkel ist, und alles Geheime. (Neuer Gedanke:) Diese Papyrusrolle wurde kopiert im Regierungsjahr 33, Monat 4 der Überschwemmungszeit [unter der Majestät des Königs von] Unterägypten „Groß-an-Stärke-ein-Ra“, Leben gegeben, in der Art von (besser: nach der Vorlage von) Schriften von den Alten, die gemacht worden sind in der Zeit [von Amenemhet III, s. die folgende Bemerkung]. Es ist der Schreiber Ahmose, der diese Sammlung niedergeschrieben hat.

Bemerkung: Die in der Transliteration angegebenen Ergänzungen würden auf den Thronnamen „Der-zur-Maat-gehört-ein Ra“ hinweisen. In diesem Fall handelt es sich um einen Pharao der 12. Dynastie, der besser unter seinem Eigennamen Amenemhet (III) bekannt ist. Damit ginge Ahmoses Kopie auf einen Papyrus aus dem Zeitraum etwa zwischen 1842 und 1795 v. Chr. zurück.

Das Problem 79 des Papyrus Rhind (vgl. Abb. 2) zeigt zwei Rechenwege zur Berechnung von $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$. Diese Summe hat die allgemeine Form $S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$, wobei q beliebig und n eine natürliche Zahl ist. Eine solche Summe bezeichnen Mathematiker als **geometrische Reihe**. Der Text beginnt eigentlich mit der linken Spalte. Wir schauen uns aber zuerst die linke Spalte an, da sie einfacher zu interpretieren ist.

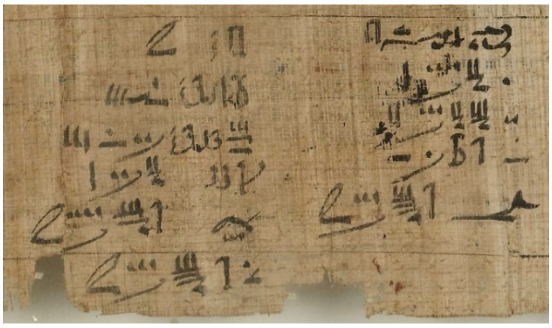
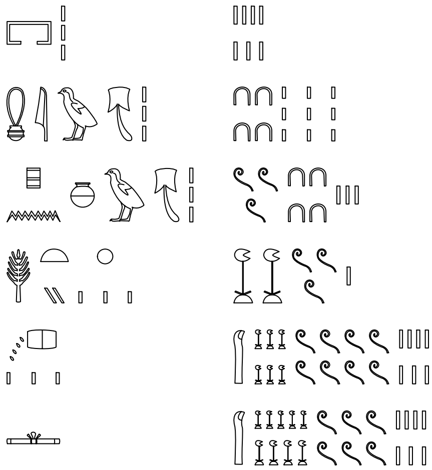
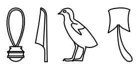
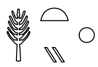
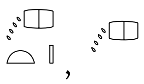
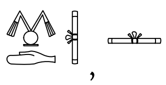


Abb. 2: Problem 79 aus dem Papyrus Rhind

Mit Hieroglyphen geschrieben lautet sie (nach [2] u. [3]):



Vokabeln

	*mjw*	Kater (343)
	*pnw*	Maus (293)
	*bd.t*	Emmer (283)
	*ḥqꜣ.t*	Heqat bzw. Hekat, Scheffel [Raummaß für Getreide etc.] (607)
	*dmḏ*	zusammenfügen, summieren; Gesamtheit, Summe (1052)

Übersetzung

Häuser	7
Katzen	49
Mäuse	343
Emmer	2301 (Fehler, s. u.)
Hekat	16807
Summe	19607

Die Ausgangszahl 7 wurde hier immer wieder mit 7 multipliziert; die ersten 5 Zahlen stellen also die Potenzen 7^1, 7^2, …, 7^5 dar. Wer die einzelnen Ergebnisse überprüft, stellt fest, dass Ahmose beim Kopieren allerdings ein Fehler unterlaufen ist: Statt 2301 müsste es eigentlich 2401 heißen; tatsächlich wurde der nächste Wert 16807 auf der Grundlage des korrekten Wertes berechnet.

An dieser Stelle fragt man sich vielleicht, wie dieser Abschreibfehler geschehen konnte, kann man die Hieroglyphen für 100 (im Gegensatz vielleicht zu denen von 1) deutlich erkennen. Nun, die Zahlen 100, 200, 300, 400, … sehen in der hieratischen Schreibweise doch wesentlich anders aus als in der Hieroglyphendarstellung (vgl. Abb. 3). Hier unterscheiden sich die Zahlen 300 und 400 tatsächlich nur durch einen einzigen kleinen Strich!

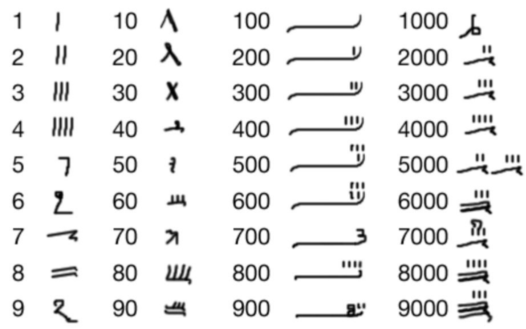
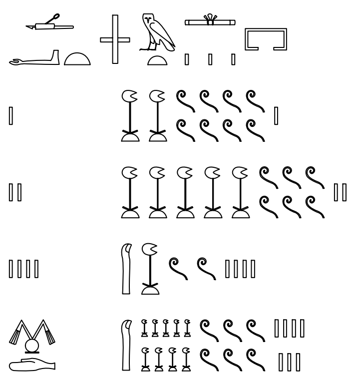


Abb. 3: Hieratische Zahlzeichen

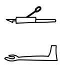
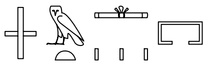
Die Erläuterungen *Häuser*, *Katzen*, … werden unterschiedlich interpretiert. Einerseits erinnern sie an Rechengeschichten, z B. die von Leonardo Fibonacci von Pisa (ca. 1200 n. Chr.):

Sieben alte Weiber gehen nach Rom;
jede von ihnen führt sieben Esel mit sich;
auf jedem Esel sind sieben Säckchen;
in jedem Säckchen sind sieben Brote;
und jedes Brot hat sieben Messerchen;
und jedes Messerchen hat sieben Scheiden.
Es wird nach der Summe aller erwähnten Dinge gefragt.

Eisenlohr deutet die Erläuterungen als allgemeine Bezeichnungen für die erste, zweite, … Potenz einer Zahl (vgl. [3], S. 184*f*). Dass es Ahmose hier tatsächlich um mehr geht als eine „Rechengeschichte“, zeigt sich bei der Betrachtung der rechte Spalte von Abb. 2. Wenden wir uns also dieser Spalte zu: Mit Hieroglyphen geschrieben lautet sie (nach [2] u. [3]):



Vokabeln

	*wꜥ*	1, ein (193)
	*jm.t-pr*	Testament, Hausrat, Anwesen (49)

Transliteration

wꜥ.t jm.t-pr (?)

1	2801
2	5602
4	11204
dmḏ	19607

Übersetzung

Ein Haushalt(?)

1	2801
2	5602
4	11204
Summe	19607

Sofort ist klar: Hier wird das Produkt aus 2801 und 7 gebildet. Damit stoßen wir auf dasselbe Ergebnis wie bei der vorhergehenden Rechnung. Offensichtlich soll es sich hier um eine andere Möglichkeit handeln, die Summe $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$ zu berechnen. Rätselhaft ist nur, wie Ahmose auf die Zahl 2801 gestoßen ist. Eisenlohr (vgl. [3]) geht davon aus, dass Ahmose die folgende Regel (aus einer anderen Quelle) benutzte:

Teile das um 1 verminderte Glied der letzten Potenz (bei uns $7^5 = 16807$) durch das um 1 verminderte Glied der ersten Potenz (7). Multipliziere das Ergebnis mit der ersten Potenz.

Mathematikern ist diese Regel als **Summenformel** für die geometrische Reihe $S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ bekannt:

$$S_n = q \cdot \frac{(q^n - 1)}{q-1}$$

Setzen wir für q den Wert 7 und für n den Wert 5 ein, erhalten wir tatsächlich den Wert 2801.

***Herleitung der Summenformel*:**

Wir multiplizieren zunächst S_n mit (q-1):

$$S_n \cdot (q-1) = S_n \cdot q - S_n$$

$$= q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} - q - q^2 - \cdots - q^n$$

$$= q^{n+1} - q = q \cdot (q^n - 1)$$

Nach Division durch (q - 1) erhalten wir

$$S_n = q \cdot \frac{(q^n - 1)}{q-1} \ .$$

Nach David Reimer (vgl. [5]) ist es allerdings auch möglich, dass Ahmose eine andere Regel angewandt hat, nämlich:

Berechne zunächst die Potenzreihe $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$*, addiere dann 1 dazu und multipliziere das Ergebnis mit 7.*

Wir testen diese Strategie aus: Die Summe $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$ ist 2800; wir addieren 1 dazu und erhalten die Zahl 2801 (s.o.!). Mit 7 multipliziert ergibt das wieder 19607.

Auf den ersten Blick sieht dies einfacher aus als die von Eisenlohr angegebene Strategie; immerhin müssen wir hier keine Division ausführen. Dafür muss allerdings zunächst der Wert 2800 für die Potenzreihe $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$ berechnet werden, und dies ist aufwändiger als die Berechnung der einzelnen Potenzen.

Die formale Begründung für die gerade vorgestellte Vorgehensweise ist übrigens einfacher als bei der Summenformel; sie ergibt sich durch einfaches Ausmultiplizieren und anschließendes Umsortieren:

$$(q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + 1) \cdot q = q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

Wie Ahmose nun wirklich gerechnet hat, werden wir hier nicht beurteilen können. Interessant ist dennoch, dass überhaupt Potenzreihen betrachtet werden – und dafür sogar die eine oder andere hilfreiche Strategie bekannt war.

Das Volumen eines Pyramidenstumpfes (vgl. Abb. 4) zu berechnen, stellt schon ein anspruchsvolles geometrisches Problem dar. Heutzutage wird zur Lösung dieses Problems einfacherweise eine Formel benutzen:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$$

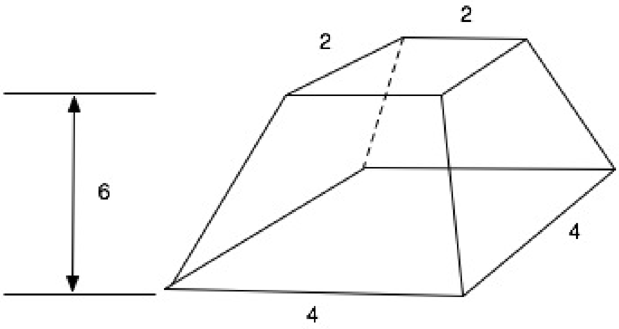


Abb. 4: Pyramidenstumpf (Problem 14 des Papyrus Moskau)

In diese Formel setzt man die angegebenen Werte für die Kanten (*a* = 4 und *b* = 2) sowie für die Höhe (*h* = 6) ein und berechnet dann den Wert des Terms. Eine solche abstrakte Vorgehensweise war den Ägyptern nicht bekannt; sie stellten ihre Lösung dar, indem sie für ein konkretes Beispiel die Vorgehensweise in ihren einzelnen Schritten angaben.

Das **Papyrus Moskau** zeigt sehr schön, wie sie hierbei vorgingen. Dieses Papyrus stammt aus der Nähe von Theben und wurde 1893 durch den russischen Ägyptologen Wladimir Semjonowitsch Golenischtschew angekauft. Heute befindet es sich im Puschkin-Museum für bildende Künste in Moskau.

Als Beispiel hatte der Schreiber dieses Papyrus den Pyramidenstumpf aus Abb. 4 gewählt: Die Querschnittsflächen sind jeweils Quadrate, das untere mit der Seitenlänge 4, das obere mit der Seitenlänge 2; die Höhe des Pyramidenstupfes ist 6 (Einheiten werden hier nicht angegeben; sie sind für die Rechnung nicht wesentlich!).

Unsere Formel liefert sehr rasch das Volumen für diesen Körper:

$$V = \frac{6}{3}\,(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 2 \cdot (16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56$$

Das Papyrus Moskau ist (wie auch das Papyrus Rhind) in hieratischer Schrift geschrieben. Ich gebe den Text hier in Hieroglyphenschrift an. Dabei habe ich den Zeilenumbruch im Gegensatz zum Original am Inhalt orientiert; die Zeilennummern entsprechen also nicht denen des Originals.

In dem Text taucht an zwei Stellen die Seitenansichten von einem Pyramidenstumpf als Hieroglyphe auf. Da mir diese nicht als Type zur Verfügung steht, habe ich sie mit der Abkürzung PS dargestellt.

Als Erläuterung gibt der Schreiber noch eine Skizze mit Nebenrechnungen an (s. Abb. 5); um die im Hieroglyphentext benutzte Leserichtung einzuhalten, habe ich die Originaldarstellung horizontal gespiegelt.

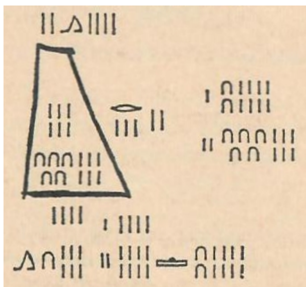
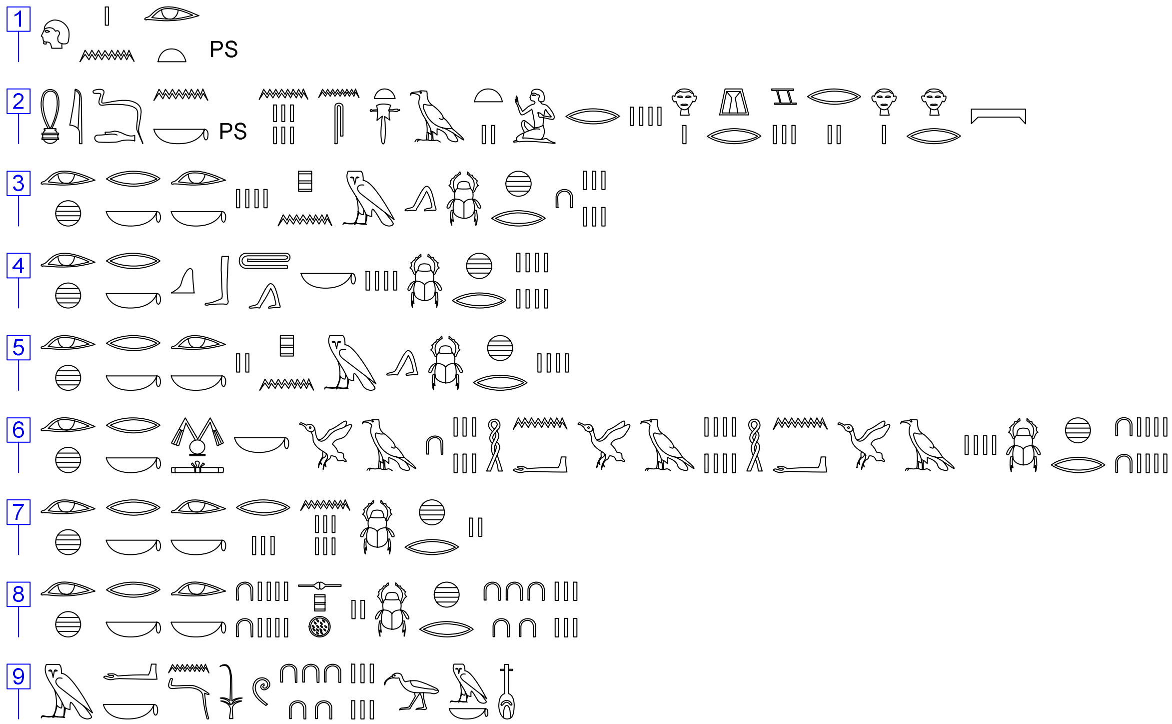
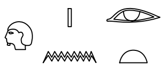
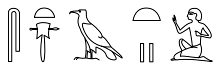
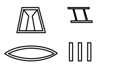
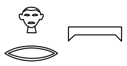
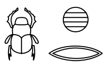
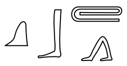
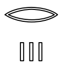


Abb. 5: Nebenrechnungen

Hieroglyphentext (nach [2]):



Vokabeln

	*tp-n-jrj.t*	(Mathematisches) Verfahren (997)
	*stwtj*	Volumen, Fläche (845)
	*ẖrw*	Unterseite; Basis (693*f*)
	*ḥrw*	Oberseite (596)
	*jrj=k … m jw*	quadriere … (101.29)
	*ḫpr*	werden; hier: ergeben (638*f*.18)
	*qꜣb*	vermehren, verdoppeln (916)
	*r-3*	1/3 (mehr dazu im nächsten Kapitel)
	*n(j) sw + Nomen*	zu ihm gehörig ist … (454)

Grammatik (Die *sḏm.ḫr=f*-Form)

Das **Suffix *ḫr*** einer *sḏm.ḫr=f*-Form kennzeichnet **eine notwendige Aktion**. *jrj.ḫr=k* bedeutet also „Du musst [so] rechnen“ oder „Rechne [so]“.

Transliteration

1. *tp-n-jrj.t* [Pyramidenstumpf]
2. *mj ḏd n=k* [Pyramidenstumpf] *n* 6 *n stwtj r* 4 *ḥr ẖrw r* 2 *ḥr ḥrw*
3. *jrj.ẖr=k jrj=k* 4 *pn m jw ẖpr* 16
4. *jrj.ẖr=k qꜣb=k* 4 *ẖpr* 8
5. *jrj.ẖr=k jrj=k* 2 *pn m jw ẖpr* 4
6. *jrj.ẖr=k dmḏ pꜣ* 16 *ḥnꜥ pꜣ* 8 *ḥnꜥ pꜣ* 4 *ẖpr* 28
7. *jrj.ẖr=k jrj=k* 1/3 *n* 6 *ẖpr* 2
8. *jrj.ẖr=k jrj=k* 28 *sp zn ẖpr* 56
9. *mk n*(*j*)*-sw* 56 *gmj=k nfr*

Übersetzung

1. Verfahren (für einen) Pyramidenstumpf
2. Wenn dir mitgeteilt wird ein Pyramidenstumpf von 6 hinsichtlich der Höhe bei 4 an der Unterseite (Unterstein) bei 2 an der Oberseite, [dann]…
3. Rechne so: Du quadrierst diese 4, ergibt 16.
4. Rechne so: Du verdoppelst 4, ergibt 8.
5. Rechne so: Du quadrierst diese 2, ergibt 4.
6. Rechne so: Füge zusammen (d. h. addiere) diese (bekannte) 16 zusammen mit dieser (bekannten) 8 und mit dieser (bekannten) 4, ergibt 28.
7. Rechne so: Du machst 1/3 von 6, ergibt 2.
8. Rechne so: Du machst 28 2-mal, ergibt 56.
9. Sieh, zu ihr (Bezug: Pyramide) gehörig ist 56, du wirst es gut finden.

Der Bezug zu unserer Volumenformel lässt sich leicht herstellen:

1. Quadriere 4, ergibt 16 → a^2
2. Verdopple 4, d. h. multipliziere 4 mit 2, ergibt 8 → $a \cdot b$
3. Quadriere 2, ergibt 4 → b^2)
4. Addiere diese 3 Werte → Ausdruck in der Klammer von unserer Volumenformel
5. Bilde ein Drittel von 6, ergibt 2 → $\frac{h}{3}$
6. Multipliziere den Klammerausdruck mit dem letzten Ergebnis → $\frac{h}{3} \cdot (\dots)$

Wir sehen: Das entspricht genau der Rechnung mit unserer Volumenformel! Leider liefert uns der Schreiber keine Begründung für den von ihm beschriebenen Rechenweg. Dass dieser Rechenweg damals überhaupt bekannt war, ist schon erstaunlich, wenn man bedenkt, dass eine Herleitung zwar schon mit Kenntnissen aus der Mittelstufe möglich, aber nicht trivial ist. Wer sich davon überzeugen möchte, kann die folgende Herleitung der Volumenformel studieren.

Volumenformel für einen Pyramidenstumpf

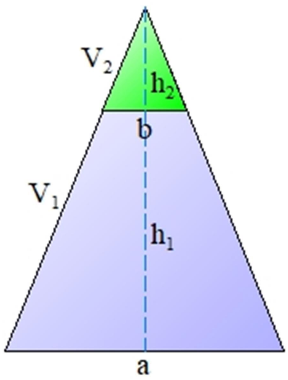
Wir ergänzen den Pyramidenstumpf zu einer Pyramide P, indem wir eine "passende" Pyramide P_2 auf den Pyramidenstumpf P_1 setzen (vgl. die Abb unten). Das Volumen V_1 von P_1 ergibt sich dann als Differenz der Volumina V_P von P und V_2 von P_2: $V_1 = V_P - V_2$

Die Ägypter wussten schon: Das Volumen einer Pyramide ist ein Drittel so groß wie das Volumen eines Quaders mit gleicher Grundfläche und Höhe. Hier ist also:

$V_P = \frac{h}{3} a^2$ mit $h = h_1 + h_2$.

Mit dem 3. Strahlensatz erhalten wir eine Beziehung zwischen h_1 und h_2:

$$\begin{aligned} \frac{h_2}{b/2} &= \frac{h_1 + h_2}{a/2} \\ \frac{h_2}{b} &= \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{a} \\ h_2\, a &= h_1\, b + h_2\, b \\ h_2\,(a-b) &= h_1\, b \qquad (*) \end{aligned}$$



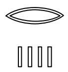
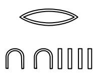
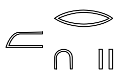
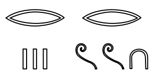
Nun ist:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_P - V_2 \\ &= \frac{1}{3}(h_1 + h_2)\cdot a^2 - \frac{1}{3} h_2 \cdot b^2 \\ &= \frac{1}{3}[h_1 \cdot a^2 + h_2 \cdot (a^2 - b^2)] \text{ und mit der 3. binomischen Formel} \\ &= \frac{1}{3}[h_1 \cdot a^2 + h_2 \cdot (a-b)(a+b)] \text{ und mit } (*) \\ &= \frac{1}{3}[h_1 \cdot a^2 + h_1 \cdot b\,(a+b)] \\ &= \frac{1}{3} h_1 \cdot [a^2 + ab + b^2] \end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Formel für den Pyramidenstumpf P_1.

Wenn wir an Brüche denken, haben wir Ausdrücke wie z. B. $\frac{3}{4}, \frac{5}{21}$ oder $\frac{43}{30}$ vor Augen. Solche Brüche gab es bei den Ägypter nicht. Sie kannten nur ganz bestimmte Brüche, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{156}$. Derartige Brüche, die eine 1 als Zähler haben, bezeichnet man in der Mathematik als **Stammbrüche**. Die Ägypter kannten im Wesentlichen nur solche Stammbrüche. Auf die wenigen Ausnahmen werden wir am Ende dieses Kapitels noch zu sprechen kommen.

Wie wurden diese Brüche nun hieroglyphisch geschrieben? Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele an:

Hieroglyphe	**Transliteration**	**Bedeutung**
	*gs*	$\frac{1}{2}$
	*r-4*	$\frac{1}{4}$
	*r-24*	$\frac{1}{24}$
	*gs r-12*	$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$
	*r-3 r-210*	$\frac{1}{3}+\frac{1}{210}=\frac{71}{210}$

Mit Ausnahme des Bruchs $\frac{1}{2}$ werden alle anderen Brüche mit Hilfe des Wortes  (*rꜣ*, deutsch: Teil), dargestellt. Unter dem Zeichen wird der Nenner in der üblichen Weise geschrieben. Werden mehrere Stammbrüche hintereinander geschrieben wie im 4. und 5. Beispiel, bezeichnet dies die Summe dieser Brüche. Wir sehen, dass sich hier (in unserer Schreibweise) Brüche ergeben, welche keine Stammbrüche sind. An dieser Stelle verraten wir schon: Alle „unsere" Brüche lassen sich als Summe von Stammbrüchen darstellen. Damit ist klar: Alle „unsere" Brüche können auch mit Hilfe der ägyptischen Hieroglyphen dargestellt werden.

Versuchen wir einmal, den Bruch $\frac{7}{10}$ in die Summe von zwei Stammbrüchen zu zerlegen. In diesem Fall ist das ganz einfach: $\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$. Auch bei dem Bruch $\frac{13}{42}$ ist es nicht allzu schwer: $\frac{13}{42}=\frac{7}{42}+\frac{6}{42}=\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$. Im Allgemeinen wird eine derartige Zerlegung aber nicht immer so einfach sein. Wir werden uns später noch einmal um dieses Problem kümmern.

Eine solche Zerlegung ist keineswegs eindeutig. So stellt auch $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{42}$ den Bruch $\frac{13}{42}$ dar. Tatsächlich hätten die Ägypter diese Zerlegung sogar der zuerst angegebenen Zerlegung vorgezogen. Sie achteten nämlich darauf, dass bei der Zerlegung

1. keine gleichen oder nahe beieinander liegenden Nenner auftauchen,

2. Stammbrüche mit den größeren Nennern weiter rechts stehen.

Was ist der Sinn der ersten Regel? Schauen wir uns die zweite Zerlegung an, dann sehen wir auf einen Blick, dass der erste Summand $\frac{1}{4}$ schon ein guter Näherungswert von $\frac{13}{42}$ ist; schließlich sind die beiden Nenner 28 und 42 deutlich größer als der Nenner 4. In der Tat weicht der erste Summand weniger als 20% vom Wert $\frac{13}{42}$ ab. Bei der ersten Zerlegung hingegen beträgt die relative Abweichung ca. 46%.

Die beiden Regel haben also ein ganz praktischen Grund: Sie sorgen dafür, dass schon der 1. Summand meist eine gute Schätzung für den Gesamtwert darstellt.

In unserem Zahlensystem befolgen wir übrigens eine ähnliche Strategie, wenn wir Dezimalzahlen benutzen: Bei der Zahl 0,635 wissen wir sofort, dass 0,6 ein guter Näherungswert für diese Zahl ist, weil die nächsten Stellen nur noch für ein paar Hundertstel und Tausendstel stehen.

Kommen wir nun auf die oben schon erwähnten **Ausnahme-Brüche** zu sprechen.

 steht für $\frac{2}{3}$ (wurde häufig benutzt)

 steht für $\frac{3}{4}$ (wurde sehr selten benutzt)

Wie nützlich der Bruch $\frac{2}{3}$ ist, zeigt die Zerlegung von dem Bruch $\frac{5}{6}$. Natürlich kann diese Zerlegung auch mit Stammbrüchen erfolgen: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Diese verstößt aber gegen Regel 1 (s.o.). Tatsächlich ist $\frac{1}{2}$ nur eine sehr schlechte Näherung für $\frac{5}{6}$: Die Abweichung beträgt ca. 67%. Benutzen wir hingegen die Zerlegung $\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, so beträgt die Abweichung nur noch 25%. Tatsächlich benutzen die Ägypter den Bruch $\frac{2}{3}$ sehr häufig; mehr dazu in Kapitel 9.

Für die bisherigen Erläuterungen war es ganz zweckmäßig, die ägyptischen Brüche mit Hilfe der von uns gewohnten Schreibweise mit dem Bruchstrich anzugeben. In Zukunft wollen wir nun eine Schreibweise benutzen, welche der ägyptischen etwas näher kommt; ich habe sie von [5] übernommen. In der rechten Tabelle sehen Sie einige Beispiele. Der Querstrich soll dabei an das - Zeichen erinnern.

$\overline{2}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{3}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{13}$	$\frac{1}{13}$
$\overline{250}$	$\frac{1}{250}$
$\overline{\overline{3}}$	$\frac{2}{3}$

Ferner werden wir im Folgenden Zahlen wie $\overline{13}$ oder $\overline{152}$ als ***echte Brüche*** und Zahlen wie $\overline{\overline{3}}\,\overline{8}$ oder 5 $\overline{13}\,\overline{67}$ als ***unechte Brüche*** bezeichnen.

Halbieren von Brüchen

In dem Kapitel „Multiplikation und Division von zwei ganzen Zahlen“ hatten wir schon gesehen, dass das Verdoppeln von Zahlen eine wichtige Rolle spielt. Jetzt schauen wir uns das Halbieren von Zahlen an. Das Halbieren entspricht einer Multiplikation mit $\overline{2}$.

Zunächst kümmern wir uns um das Halbieren von ganzen Zahlen: Um die Zahl 246 zu halbieren, zerlegen wir sie geschickt:

246 = 200 + 40 + 6

Die Halbierung erfolgt nun summandenweise:

$\overline{2} \cdot 246 = 100 + 20 + 3 = 123$

Die Zerlegung muss nicht unbedingt stellenweise erfolgen. Um die Zahl 328 zu halbieren, können wir z. B. auch folgende Zerlegung vornehmen:

328 = 200 + 120 + 8

$\overline{2} \cdot 328 = 100 + 60 + 4 = 164$

Nun halbieren wir Brüche. Wir beginnen mit dem Halbieren eines echten Bruchs. Dazu braucht man nur den Nenner verdoppeln:

$\overline{2} \cdot \overline{7} = \overline{14}$

Bei unechten Brüchen gehen wir summandenweise vor:

$\overline{2} \cdot 4\,\overline{3} = \overline{2} \cdot 4 + \overline{2} \cdot \overline{3} = 2\,\overline{6}$

$\overline{2} \cdot 19\,\overline{13} = \overline{2} \cdot 18 + \overline{2} \cdot 1 + \overline{2} \cdot \overline{13} = 9\,\overline{2}\,\overline{26}$

Verdoppeln von Brüchen

Beim Verdoppeln eines echten Bruches muss der Nenner halbiert werden:

$2 \cdot \overline{24} = \overline{12}$

Bei einem unechten Bruch verdoppeln wir summandenweise:

$2 \cdot 38\,\overline{4}\,\overline{52} = 76\,\overline{2}\,\overline{26}$

Sie ahnen es schon: Es gibt ein Problem, wenn der Nenner nicht gerade ist. Mit unserer bisherigen Regel kommen wir hier nicht weiter.

Hier benutzten die Ägypter Tabellenwerke mit fertigen Lösungen für die Verdopplung von Brüchen mit ungeraden Nennern; man bezeichnet eine solche Tabelle auch als ***2/n*-Tabelle**.

Im Papyrus Rhind werden diese Lösungen der Reihe nach für die Brüche mit den Nennern 3, 5, 7, 9, 11, …, 101 aufgeführt. Der Schreiber begnügt sich dabei nicht, die Lösungen anzugeben, sondern er liefert auch stets eine Begründung.

Für die Verdopplung von $\overline{5}$ gibt er z. B. die Zerlegung $\overline{3}\ \overline{15}$ an. Bevor wir uns Ahmoses Begründung anschauen, überprüfen wir sein Ergebnis zunächst mit „unserer“ Bruchrechnung:

$$\overline{3}\ \overline{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 2 \cdot \overline{5}$$

Die angegebene Zerlegung kann man auch graphisch verdeutlichen: In der folgenden Zeichnung sehen wir eine Tafel Schokolade, welche in 5 vertikale Riegel zerlegt ist. Jeder dieser Riegel stellt ein Fünftel der Schokolade dar. 2 dieser Riegel sind grau ausgefüllt; sie stellen $2 \cdot \overline{5}$ dar. Nun werden noch zwei waagerechte Schnitte vorgenommen – und zwar so, dass die Schokolade in insgesamt 15 gleich große Stücke zerlegt wird. 6 davon gehören zu unseren zwei Riegeln. Diese Stücke sortieren wir nun um wie in der Abbildung 6 durch eine rote Schraffierung angezeigt. Die untere Zeile bildet dann ein Drittel der Schokolade ($\overline{3}$), das einzelne Stück ein Fünfzehntel ($\overline{15}$).

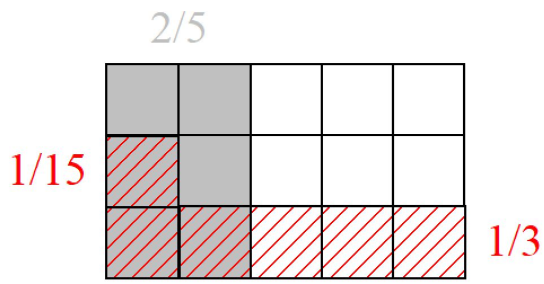


Abb. 6: Verschiedene Zerlegungen

Ahmoses Begründung sieht im Prinzip so aus:

Einer	Fünftel (Ziel: 2)	
1	5 = 3 + 2	
$\overline{3}$	$1\ \overline{\overline{3}}$	●
$\overline{15}$	$\overline{3}$	●
$\mathbf{\overline{3}\ \overline{15}}$	$\mathbf{1 + \overline{3} + \overline{\overline{3}} = 1 + 1 = 2}$	

Die Strategie dabei ist, dass man solche Fünftel findet, deren Summe gerade 2 ergibt.

Bei dem 2-fachen von $\overline{7}$ sieht das bei Ahmose im Wesentlichen so aus:

Einer	Siebtel (Ziel: 2)	
1	7	
$\overline{2}$	$3\ \overline{2}$	
$\overline{4}$	$1\ \overline{2}\ \overline{4}$	●
$\overline{28}$	$\overline{4}$	●
$\mathbf{\overline{4}\ \overline{28}}$	$\mathbf{1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{4} = 1 + \overline{2} + \overline{2} = 1 + 1 = 2}$	

An dieser Stelle fragt man sich: Wie kommt man darauf, 1/28 Einer zu wählen? Nun, werfen wir einen Blick auf die darüber liegende Zeile, so bemerken wir, dass zum Erreichen des Wertes 2 bei den Siebteln gerade noch ein Viertel fehlt. An den entsprechenden Wert für die Einer gelangte Ahmose mit Hilfe der folgenden Hilfstabelle:

Einer	Siebtel (Ziel: $\overline{4}$)	
1	7	
2	14	
4	28	
$\overline{\mathbf{28}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	●

Hierbei wurde im letzten Schritt folgende **Tausch-Regel** angewandt: **Vertauscht man die Zahlen einer Zeile, muss man die Zahlen durch ihre Kehrwerte ersetzen**.

Halten wir fest: Das 2-fache von $\overline{7}$ ist $\overline{4}\ \overline{28}$.

Schauen wir uns gleich noch ein weiteres Beispiel an: Was ist das 2-fache von $\overline{13}$?

Einer	13-tel (Ziel: 2)	
1	13	
$\overline{2}$	$6\ \overline{2}$	
$\overline{4}$	$3\ \overline{4}$	
$\overline{8}$	$1\ \overline{2}\ \overline{8}$	●
$\overline{52}$	$\overline{4}$ (vgl. Hilfstabelle)	●
$\overline{104}$	$\overline{8}$	●
$\overline{\mathbf{8}}\ \ \overline{\mathbf{52}}\ \overline{\mathbf{104}}$	$\mathbf{1\ \overline{2}\ \overline{8}\ \overline{4}\ \overline{8} = 1\ \overline{2}\ \overline{4}\ \overline{4} = 1\ \overline{2}\ \overline{2} = 2}$	

Hilfstabelle:

Einer	13-tel (Ziel: $\overline{4}$)	
1	13	
2	26	
4	52	
$\overline{\mathbf{52}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	●

Das 2-fache von $\overline{13}$ ist also $\overline{8}\ \ \overline{52}\ \overline{104}$.

Auf der nächsten Seite ist die 2/*n*-Tabelle des Papyrus Rhind vollständig angegeben. Es muss aber an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass auch andere Ergebnisse (natürliche mit demselben Wert) möglich sind. So kann man z. B. rasch nachprüfen, dass das 2-fache von $\overline{7}$ auch durch $\overline{4}\ \overline{28}$ angegeben werden kann.

2/*n* - Tabelle vom Papyrus Rhind (nach [6])		
2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21 = 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

Mancher hat sich vielleicht schon die Frage gestellt, ob jedes 2-fache eines (echten) Bruches mit ungeradem Nenner sich als Summe von Stammbrüchen darstellen lässt. Diese Frage kann mit einem klaren Ja beantwortet werden. Mit ein wenig Algebra ist es sogar recht einfach, zu jeder ungeraden Zahl *n* eine Darstellung mit nur zwei Stammbrüchen zu finden:

Als ersten Nenner n_1 wählen wir $(n+1)/2$. Dieser Wert ist eine ganze Zahl, weil $n+1$ gerade ist. Der zweite Nenner n_2 ist dann gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Zum Beweis setzen wir diese Ausdrücke in $1/n_1 + 1(n_2)$ ein:

$$\frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{n(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n}$$

Brüche mit ganzen Zahlen multiplizieren

Wir wollen nun einen (unechten) Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizieren; die Aufgabe lautet: $3\,\overline{7} \cdot 6$. Zur Lösung benutzen wir eine Reihe der oben erwähnten Regeln; insbesondere greifen wir auch auf die 2/*n*-Tabelle zurück.

Ziel: 6		
1	$3\ \overline{7}$	
2	$6\ \overline{4}\ \overline{28}$	●
4	$12\ \overline{2}\ \overline{14}$	●
6	$\mathbf{18\ \overline{2}\ \overline{4}\ \overline{14}\ \overline{28}}$	**vgl. Kap 11!**

Ganze Zahlen dividieren

Im Kapitel 2 hatten wir bereits Divisionsaufgaben betrachtet; allerdings hatten wir uns auf solche Divisionen beschränkt, die ohne Rest aufgehen. Genauer gesagt: Wir hatten die Division durchgeführt und den Rest nicht weiter behandelt.

Jetzt schauen wir uns die Aufgabe 13 : 42 an; es ist klar, dass wir nun um den „Rest" nicht herumkommen.

Bei der folgenden Tabelle gehen wir von 42 42-teln, d. h. von 1 Einer, aus und versuchen schrittweise zu 13 42-teln zu gelangen:

Einer	42-tel (Ziel: 13)	
1	42	
$\overline{42}$	1	●
$\overline{21}$	2	
$\overline{14}\ \overline{42}$	4	●
$\overline{7}\ \overline{21}$	8	●
$\mathbf{\overline{7}\ \overline{14}\ \overline{21}\ \overline{42}\ \overline{42}}$	**13**	

Unser Resultat (der Ausdruck für die Einer in der letzten Zeile) lässt sich (u. A. mit Hilfe der 2/*n*-Tabelle) noch vereinfachen:

$$\mathbf{\overline{7}\ \overline{14}\ \overline{21}\ \overline{42}\ \overline{42} = \overline{7}\ \overline{14}\ \overline{21}\ \overline{21} = \overline{7}\ \overline{14}\ \overline{14}\ \overline{42} = \overline{7}\ \overline{7}\ \overline{42} = \overline{4}\ \overline{28}\ \overline{42}}$$

Fast übersieht man diesen kleinen Bereich am unteren Rand des Papyrus Rhind (Abb. 7). Dabei ist er sehr interessant, liefert er doch einen Hinweis darauf, wie man aus dem Durchmesser eines Kreises seinen Flächeninhalt (näherungsweise) berechnen kann.

Leider sind Ahmoses Erläuterungen hierzu sehr spärlich: Im Innern der Figur steht die Zahl 9 (vermutlich die Seitenlänge des Quadrats) und daneben stehen zwei Rechnungen (vgl. Abb. 8). Darin wird $8 \cdot 8$ bzw. $9 \cdot 9$ ausgerechnet.

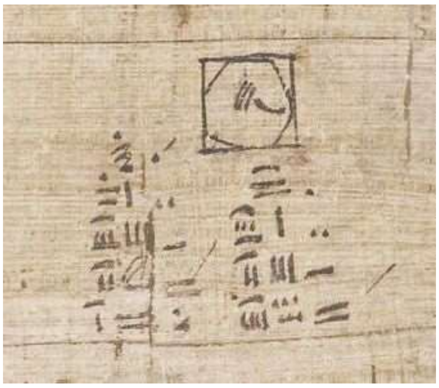


Abb. 7: Problem 48

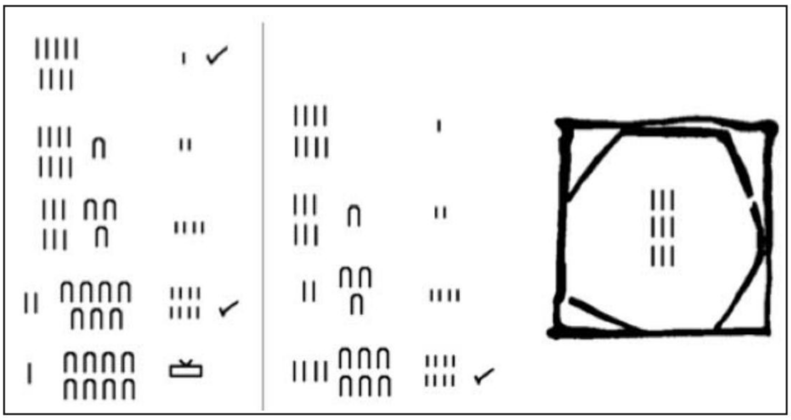


Abb. 8: Problem 48 in Hieroglyphenschrift

Wie kann man das deuten? Wenn man so will, wird hier tatsächlich eine Art Quadratur des Kreises vorgenommen: Ein Kreis mit einem Durchmesser von 9 Einheiten (in den Abbildungen 7 u. 8 nicht eingezeichnet) wird in ein Quadrat eingepasst. Dieses Quadrat wird in 9 gleich große Quadrate eingeteilt; und die 4 Quadrate in den Ecken werden jeweils durch eine Diagonale geteilt. (vgl. Abb. 9). Dadurch entsteht ein Achteck, dessen Fläche annähernd so groß ist wie die Kreisfläche.

Die Fläche dieses Achtecks besteht aus 5 ganzen und 4 halben Quadraten. Der Flächeninhalt dieses Achtecks ist also $5 \cdot 3^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 45 + 18 = 63$ Einheiten groß. Ahmose geht davon aus, dass die Kreisfläche A_K ein wenig größer ist als 63 Einheiten, nämlich 64 Einheiten; damit ist sie genauso groß wie die Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 8.

Nun ist die Fläche A_Q des den Kreis umschließenden Quadratrats gerade 81 Einheiten groß.

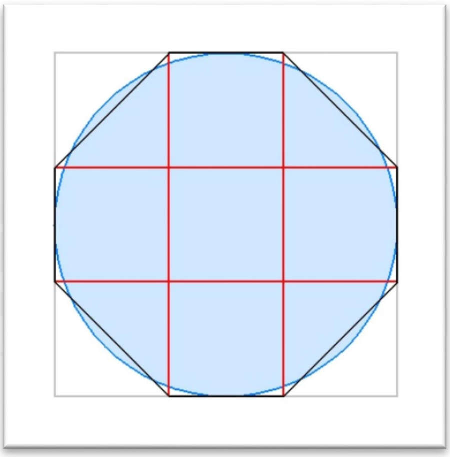


Abb. 9: Skizze zum Problem 48

Vergrößert oder verkleinert man den Durchmesser des Kreises, verändert sich die Seitenlänge des umschreibenden Quadrats entsprechend: Das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_K und A_Q wird aber immer dasselbe sein wie in dem beschriebenen Beispiel, nämlich 64:81.

Somit gilt die folgende Regel: ***Der Quotient aus 64 und 81 gibt den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser 1 an. Möchte man den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser d berechnen, dann muss man das Quadrat von d mit 64 multiplizieren und das Ergebnis davon durch 81 teilen.***

Berechnung der Fläche eines Kreises

Nach dieser Regel wollen wir nun einmal den Flächeninhalt eines Kreises mit einem Durchmesser von d = 2 Einheiten berechnen. Dabei werden wir unsere bisher erworbenen Kenntnisse über das Multiplizieren und das Dividieren ausnutzen.

Erster Schritt: 2 quadrieren, Ergebnis 4 (Eine entsprechende Tabelle schenken wir uns hier!)

Zweiter Schritt: 64 mit 4 multiplizieren

Ziel: 4		
1	64	
2	128	
4	256	●
4	**256**	

Dritter Schritt: 256 durch 81 dividieren:

Wir zerlegen zuerst 256 passend: 256 = 243 + 13 und rechnen dann zunächst 243:81 = 3. Die Berechnung von 13:81 erfordert mehr Aufwand:

Einer	81-tel		Bemerkung
1	81		durch 9…
$\overline{9}$	9	●	Es fehlen noch 4 bis zur 13 (Ziel); durch 9…
$\overline{81}$	1		verdoppeln mit n/2-Tabelle…
$\overline{54}\,\overline{162}$	2		verdoppeln…
$\overline{27}\,\overline{81}$	4	●	die fehlenden 4
$\mathbf{\overline{9}\,\overline{27}\,\overline{81}}$	**13**		**Ziel erreicht**

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $3\,\overline{9}\,\overline{27}\,\overline{81}$ Einheiten groß. Greifen wir einmal zum Taschenrechner und ermitteln damit die zugehörige Dezimalzahl. Gerundet ist sie 3,160. Das ist bis auf eine Abweichung von etwa 0,6 % gerade der Wert der Kreiszahl π! Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich: Bei unserem Kreis handelte es sich ja schließlich um den Einheitskreis mit dem Radius $r = d/2 = 1$ Einheit.

Bislang haben wir den Bruch $\overline{\overline{3}} = \frac{2}{3}$ praktisch überhaupt nicht benutzt. Schaut man sich die Rechnungen der Ägypter an, so findet man diesen Bruch allerdings überraschend häufig. So taucht er allein bei den ersten 4 Begründungen zur 2/*n*-Tabelle des Ahmose schon dreimal auf (nämlich bei 2/5, 2/9 und 2/11). Nebenbei bemerkt: Weiter oben habe ich Ahmoses Beweis für die Zerlegung von 2/5 leicht abgeändert, so dass dort $\overline{\overline{3}}$ nicht aufgetaucht ist.

Wie gingen die Ägypter vor, wenn sie $\overline{\overline{3}}$ von einer Zahl, z. B. 15, angeben sollten? Nun, sie überlegten sich: Welche Zahl und ihr Halbes dazu ergibt 15. In diesem Fall ist es sehr einfach: Die gesuchte Zahl ist 10; den 10 + die Hälfte von 10 ergibt 10 + 5 = 15. Für ganze Zahlen ist es sehr einfach, das Ergebnis anzugeben. Vielleicht hatten die Ägypter für diese Fälle folgende Tabelle im Kopf:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\overline{2} \cdot n}$	$\boldsymbol{n + \overline{2} \cdot n}$
2	1	3
4	2	6
6	3	9
8	4	12
…	…	…
54	27	81
56	28	84
…	…	…

So wie wir eine Teilungsaufgabe wie z. B. 56 : 8 blitzschnell bewältigen, indem wir die gelernte Multiplikationsaufgabe 7 mal 8 = 56 umkehren, so haben die Ägypter vielleicht genauso rasch für $\overline{\overline{3}}$ mal 84 das Ergebnis 56 angeben können, indem sie aus dieser (gelernten) Tabelle die Zuordnung 56 → 84 umgekehrt haben.

Soll nun das $\overline{\overline{3}}$ – fache einer größeren Zahl bestimmt werden, kann man diese geschickt zerlegen. Bei der Aufgabe $\overline{\overline{3}}$ von 702 zerlegen wir zunächst 702 in 600 +90 +12. Die Rechnung ist dann:

$$\overline{\overline{3}} \cdot 702 = \overline{\overline{3}} \cdot 600 + \overline{\overline{3}} \cdot 90 + \overline{\overline{3}} \cdot 12 = 400 + 60 + 8 = 468$$

Natürlich funktioniert das Verfahren so nur, wenn die gegebene Zahl aus der $n + \overline{2} \cdot n$ - Reihe stammt, also ein Vielfaches von 3 ist. Wie gehen wir jetzt aber mit einer Zahl wie 703 um? Ganz einfach, wir benutzen dieselbe Zerlegung wie oben mit einem zusätzlichen Summanden 1 am Ende. Zu unserem Zwischenergebnis 468 müssen wir jetzt $\overline{\overline{3}} \cdot 1 = \overline{\overline{3}}$ addieren. Das Ergebnis ist somit $468\,\overline{\overline{3}}$.

Bei der Zahl 704 müsste man am Ende jetzt $\overline{\overline{3}} \cdot 2$ addieren; das ist gerade $1\,\overline{3}$. Insgesamt würden wir für $\overline{\overline{3}}$ von 704 also das Ergebnis $469\,\overline{3}$ erhalten.

Wenden wir uns nun dem $\overline{\overline{3}}$-fachen eines Bruchs zu, z. B. von $\overline{12}$. Für gerade Nenner – wie in diesem Fall - ist das noch einfach: Wir müssen lediglich den Nenner, um die Hälfte vergrößern. Das Ergebnis ist in unserem Fall dann $\overline{18}$. Mit anderen Worten: Die obige Tabelle kann jetzt „vorwärts“ auf den Nenner angewendet werden.

Bei einem Bruch mit ***ungeradem Nenner*** benutzen wir die folgende Regel: ***Bilde von dem Bruch die Hälfte und addiere dazu ein Sechstel des Bruchs***. Mit anderen Worten: Wir bilden einen Bruch mit dem doppelten Nenner und einen mit dem sechsfachen Nenner; die Ergebnisse werden dann addiert.

Ein Beispiel: $\overline{\overline{3}} \cdot \overline{13} = \overline{2 \cdot 13} + \overline{6 \cdot 13} = \overline{26}\ \overline{78}$

Zur Erklärung schreiben wir den mittleren Term einmal in der uns geläufigen Form und formen ihn um:

$$\frac{1}{2 \cdot 13} + \frac{1}{6 \cdot 13} = \frac{3+1}{6 \cdot 13} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{13}$$

Schauen wir uns den Rechenweg rückwärts an, erkennen wir, wie die Regel funktioniert.

Auch auf den Fall $\overline{\overline{3}} \cdot \overline{\overline{3}}$ kann man die obige Regel anwenden: Zuerst bilden wir die Hälfte von $\overline{\overline{3}}$, das ist $\overline{3}$. Nun bilden wir noch ein Sechstel von $\overline{\overline{3}}$; das ist gleich einem Drittel von $\overline{3}$, also $\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{9}$. Das Ergebnis ist nun $\overline{3}\ \overline{9}$.

Versuchen wir es jetzt einmal mit einer schwierigeren Aufgabe: $\overline{\overline{3}} \cdot 7\ \overline{\overline{3}}\ \overline{20}$

Rechnung:

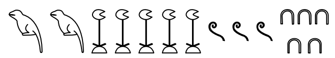
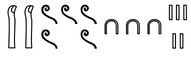
$$\overline{\overline{3}} \cdot 7\ \overline{\overline{3}}\ \overline{20} = \overline{\overline{3}} \cdot 6 + \overline{\overline{3}} \cdot 1 + \overline{\overline{3}} \cdot \overline{\overline{3}} + \overline{\overline{3}} \cdot \overline{20} = 4 + \overline{\overline{3}} + \overline{3} + \overline{9} + \overline{30} = 5\ \overline{9}\ \overline{30}$$

Zum Abschluss die Rechnung von Ahmose zum 2/9-Problem:

Einer	Neuntel (Ziel: 2)	
1	9	
$\overline{\overline{3}}$	6	!!!
$\overline{3}$	3	
$\overline{6}$	$1\ \overline{2}$	●
2	18	
$\overline{18}$	$\overline{2}$	●
$\mathbf{\overline{6}\ \overline{18}}$	$\mathbf{1\ \overline{2} + \overline{2} = 2}$	

Anscheinend war es für Ahmose naheliegender, erst die 2/3-Operation und anschließend die Halbierung durchzuführen, als direkt zu dritteln!

Schon im Kapitel 1 hatten wir die Multiplikation mit 10 behandelt: Dabei werden die einzelnen Zahlzeichen durch das Zahlzeichen der nächst *höheren* Einheit ersetzt. Bei der Division verfahren wir genau umgekehrt: Hier werden die einzelnen Zahlzeichen durch das Zahlzeichen der nächst *niedrigeren* Einheit ersetzt:

 : 10 = 

Problematisch ist es allerdings, wenn der Dividend auch Einer besitzt. In diesem Fall werden wir wieder eine Zerlegung vornehmen, z. B. 273 = 270 + 3. Die Division von 270 können wir dann wie oben dargestellt vornehmen. Für die Zahl 3 müssen wir den entsprechenden (unechten) Bruch finden. Tatsächlich hat unser Schreiber Ahmose schon vorgesorgt: dem Papyrus Rhind entnehmen wir den passenden Bruch der folgenden *n*/10-Tabelle.

1 : 10	$\overline{10}$
2 : 10	$\overline{5}$
3 : 10	$\overline{5}\ \overline{10}$
4 : 10	$\overline{3}\ \overline{15}$
5 : 10	$\overline{2}$
6 : 10	$\overline{2}\ \overline{10}$
7 : 10	$\overline{\overline{3}}\ \overline{30}$
8 : 10	$\overline{\overline{3}}\ \overline{10}\ \overline{30}$
9 : 10	$\overline{\overline{3}}\ \overline{5}\ \overline{30}$

Die dritte Zeile gibt uns an: Das Ergebnis unsere Aufgabe 273 : 10 lautet 27 $\overline{5}\ \overline{10}$.

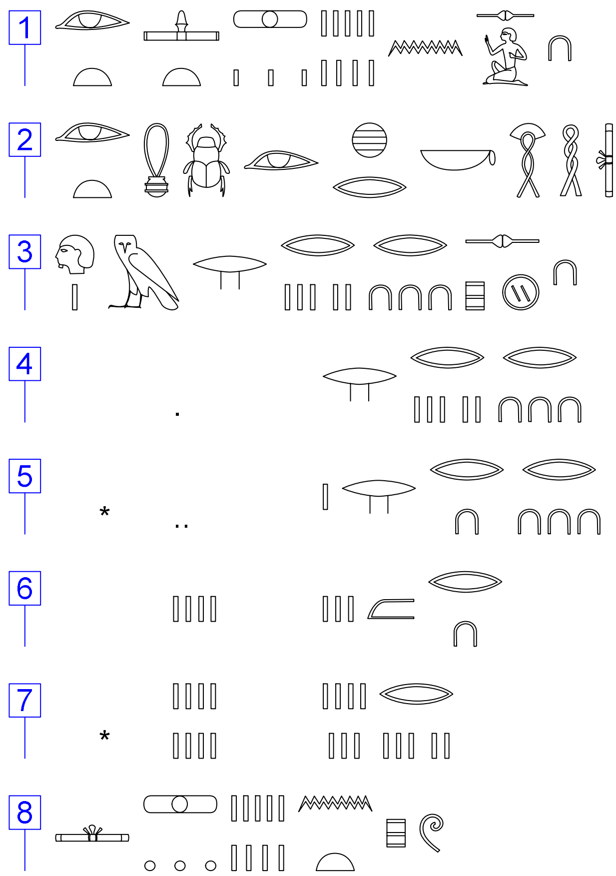
Beispielhaft wollen wir zeigen, wie man an den (unechten) Bruch für 7 : 10 gelangt:

Einer	Zehntel		Erläuterung
1	10		
$\overline{\overline{3}}$	$6\ \overline{\overline{3}}$	●	Es fehlt $\overline{3}$ zur 7 (Ziel).
$\overline{10}$	1		
$\overline{30}$	$\overline{3}$	●	
$\boldsymbol{\overline{\overline{3}}\ \overline{30}}$	$\boldsymbol{6\ \overline{\overline{3}} + \overline{3} = 7}$		

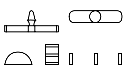
Bei Ahmose läuft die Begründung meist etwas anders ab: Zunächst wird das Ergebnis angegeben; anschließend wird die Probe gemacht, indem die angegebene Zahl mit 10 multipliziert wird. Nebenbei: Dieselbe Strategie findet sich auch bei der 2/*n*-Tabelle.

Für den Fall 9 : 10 habe ich den folgenden Originaltext (in Hieroglyphen) bei [3] gefunden (S. 31f). Er vermittelt auch einen guten Eindruck darüber, wie stark die Ägypter sich an praktischen Anwendungen orientierten. In diesem Fall geht es um die Verteilung von Broten.

Hieroglyphentext (nach [3]):



Vokabeln

	*ḥtp*	Opfergaben, Speisen; hier: Brot(laibe) (610)
	*wꜣḥ tp m* 4 [*r*] *zp* 3	multipliziere 4 mit 3 (186.11)

Transliteration mit Erläuterungen

jr.t (Infinitiv) *ḥtp* 9 *n z* 10

jr.t mj ḫpr jrj.ḫr=k (*sḏm.ḫr=f*-Form) *wꜣḥ* (Infinitiv o. Imperativ) *tp m* $\overline{\overline{3}}\ \overline{5}\ \overline{30}$ [*r*] *zp* 10

	.	$\overline{\overline{3}}\ \overline{5}\ \overline{30}$	
●	..	$1\ \overline{\overline{3}}\ \overline{10}\ \overline{30}$	(2/*n*-Tabelle benutzt)
	4	$3\ \overline{2}\ \overline{10}$	(weil $2 + 1 + \overline{3}\ \overline{5}\ \overline{15} = 3\ \overline{2}\ \overline{10}$ ist, s. u.)
●	8	$7\ \overline{5}$	

dmḏ (Partizip Passiv oder Nomen) *ḥtp* 9 *nt(j)* (Relativpronomen, auch Pl.) *pw* (A-*pw*-Satz)

Übersetzung

9 Brotlaibe verteilen für 10 Leute

Machen, wie (es) geschieht. Rechne so: multipliziere 2/3 1/5 1/30 mit 10:

(Rechenschritte s. o.)

Zusammengefügt [oder: Summe] 9 Brotlaibe, die es sind.

Mancher wird sich bestimmt über einige Rechenschritte von Ahmose gewundert haben. Es sieht so aus, als ob Ahmose Kenntnisse über das Vereinfachen von (unechten) Brüchen kennt, die uns noch fehlen. Tatsächlich erkennt man im Papyrus Rhind bei der einen oder anderen Aufgabe an einigen Ergänzungen zur Rechentabelle, mit welchem Trick eine Vereinfachung vorgenommen wurde. Einen dieser Tricks werden wir im nächsten Kapitel studieren. Dann wird uns auch klar werden, wie Ahmose zu den Gleichungen

$\overline{3}\;\overline{5}\;\overline{15} = \overline{2}\;\overline{10}$ und

$\overline{\overline{3}}\;\overline{10}\;\overline{30} + \;\overline{5} = 1$

gekommen sein könnte.

Addieren, Multiplizieren und Dividieren in der ägyptischen Sprache

Diese Begriffe gründen sich im Ägyptischen auf das Verb *wꜣḥ*; die Grundbedeutung davon ist: legen, stellen, hinsetzen (186). Speziell kann *wꜣḥ* auch für stapeln und hinzufügen stehen. *wꜣḥ* 5 *ḥr* 10 bedeutet damit: 5 zu 10 hinzufügen bzw. addieren (186.10*f*). *wꜣḥ tp* [*m*] x bedeutet: x vervielfachen (d. h. mit Hilfe der uns bekannten Verdopplungstabelle multiplizieren)

wꜣḥ tp m 20 [*r*] *zp* 10 : die Zahl 20 10mal vervielfachen, d. h. verzehnfachen, also 20 mit 10 multiplizieren. *wꜣḥ tp m* 5 *r gmj.t* 10 bedeutet wörtlich: 5 vervielfachen bis zum Finden von 10 (Zielwert); dies entspricht gerade der *Vorgehensweise* für die Division (vgl. z. B. Kapitel 2). Die ägyptischen Begriffe für die Rechenarten sind nicht abstrakt wie unsere; vielmehr spiegeln sie die Vorgehensweise (mit einer Tabelle) wieder.

In den letzten Kapiteln haben wir schon immer wieder unechte Brüche vereinfacht; insbesondere war es oft leicht gewesen, zwei gleiche echte Brüche zusammenfassen, z. B.:

$\bar{\bar{3}}\ \bar{6}\ \bar{6} = \bar{\bar{3}}\ \bar{3} = 1$

$\bar{7}\ \overline{14}\ \overline{21}\ \overline{42}\ \overline{42} = \bar{7}\ \overline{14}\ \overline{21}\ \overline{21} = \bar{7}\ \overline{14}\ \overline{14}\ \overline{42} = \bar{7}\ \bar{7}\ \overline{42} = \bar{4}\ \overline{28}\ \overline{42}$

Dabei haben wir zwei gleiche Brüche wie z. B. $\bar{6}\ \bar{6}$ aufgefasst als $2 \cdot \bar{6}$ und die Regel für das Verdoppeln von Brüchen mit geradem Nenner benutzt (vgl. Kapitel 7). Hatten die beiden Brüche denselben ungeraden Nenner, dann wurde die 2/*n*-Tabelle benutzt (vgl. Kapitel 7).

Bei den beiden Ausdrücken vom Ende des letzten Kapitels kommen wir damit aber nicht weiter. Häufig hilft hier die folgende Idee: Stelle die Summanden nicht nur als Anteile von 1, sondern auch als Anteile einer anderen geeigneten Zahl dar. Schauen wir uns dazu den Ausdruck $\bar{\bar{3}}\ \bar{5}\ \overline{10}\ \overline{30}$ an:

· 30

Einer	30-tel	Erläuterung
$\bar{\bar{3}}$	20	20 Teile von 30 sind 2/3
$\bar{5}$	6	6 Teile von 30 sind 1/5
$\overline{10}$	3	3 Teile von 30 sind 1/10
$\overline{30}$	1	1 Teil von 30 sind 1/30
1	**20+6+3+1 = 30**	**30 Teile von 30 sind 1**

: 30

In diesem Fall erhalten wir 30 30-tel, also tatsächlich 1 Einer – wie bereits behauptet. Wichtig bei dieser Vorgehensweise ist, dass bei der neuen Aufteilung nur ganze Zahlen erscheinen. Meist bietet sich hierbei das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner an.

Bei dem Beispiel $\bar{3}\ \bar{5}\ \overline{15} = \bar{2}\ \overline{10}$ vom Ende des letzten Kapitels ist es nicht ganz so einfach. Das kgV ist hier 15, also versuchen wir zunächst, die Brüche als 15-tel darzustellen:

Einer	15-tel	Erläuterung
$\bar{3}$	5	5 Teile von 15 sind 1/3
$\bar{5}$	3	3 Teile von 15 sind 1/5
$\overline{15}$	1	1 Teil von 30 ist 1/15
?	**9**	**9 Teile von 15**

Hier ist überhaupt nicht zu erkennen, wie das zu dem obigen Ergebnis führen soll. Versuchen wir es nun einmal mit der Einheit 30-tel:

Einer	30-tel	Erläuterung
$\overline{3}$	10	5 Teile von 30 sind 1/3
$\overline{5}$	6	6 Teile von 30 sind 1/5
$\overline{15}$	2	2 Teil von 30 ist 1/15
$\mathbf{\overline{2}\ \overline{10}}$	**18 15 3**	**18 Teile von 30 sind: 15 Teile von 30 plus 3 Teile von 30**

Die entscheidende Idee besteht darin, die insgesamt **18 Teile so geschickt zu zerlegen, dass für die zugehörigen Einer tatsächlich Stammbrüche (oder ggf. auch 2/3) entstehen**. Bei unserem ersten Versuch ist eine solche Zerlegung nicht möglich!

Eine sinnvolle Zerlegung kann nur dann zustande kommen, wenn wir als neue Einheit das kgV der Nenner 3, 10, 15, 2 und 5 wählen. Die letzten beiden Nenner sind aber zu Beginn der Rechnung nicht bekannt. Es empfiehlt sich daher, so wie wir es gerade getan haben, zunächst (versuchsweise) das kgV der gegebenen Nenner zu benutzen und anschließend gegebenenfalls noch feinere Aufteilungen zu benutzen.

Mit diesen Kenntnissen wollen wir nun für die Division 6:7 ein vereinfachtes Ergebnis finden:

Einer	7-tel (Ziel: 6)	
1	7	
$\overline{7}$	1	
$\overline{4}\ \overline{28}$	2	●
$\overline{2}\ \overline{14}$	4	●
$\mathbf{\overline{2}\ \overline{4}\ \overline{14}\ \overline{28}}$	**6**	

Dieses Ergebnis ist nicht sehr zufriedenstellend, zumal da der erste Bruch nur eine sehr schlechte Näherung für den Wert des Ergebnisses ist. Dieses ist auf jeden Fall größer als $\overline{\overline{3}}$. Wir wollen deswegen versuchen, das Ergebnis mit Hilfe von $\overline{\overline{3}}$ darzustellen. Bei der Vereinfachung unseres bisherigen Ergebnisses müssen wir daher den Faktor 3 mit in das kgV einbeziehen: Dieses ist nun also 3 · 4 · 7 = 84. Damit erhalten wir das neue Ergebnis $\mathbf{\overline{\overline{3}}\ \overline{7}\ \overline{21}}$**:**

Einer	84-tel	
1	84	
$\overline{2}$	42	●
$\overline{4}$	21	●
$\overline{14}$	6	●
$\overline{28}$	3	●
$\mathbf{\overline{\overline{3}}\ \overline{7}\ \overline{21}}$	**72 = 56 + 16 = 56 + 12 + 4**	**56 ist 2/3 von 84 Nur 2, 3, 4, 7 und 12 sind geeignete Zerlegungskandidaten für den Rest 16.**

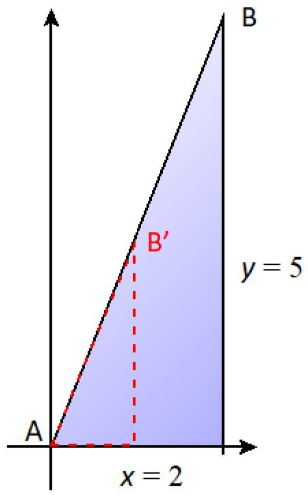


Abb. 10: Steigungsdreiecke

Wie steil eine Straße oder ein Dachgiebel ist, wird in der Mathematik durch den Begriff **Steigung** quantitativ erfasst. Die Steigung der Strecke AB in dem blauen Dreieck aus Abb. 10 beträgt zum Beispiel 2,5. Das lässt sich mit einem sogenannten Steigungsdreieck berechnen. Die horizontale Seite des Dreiecks bezeichnen wir im Folgenden immer mit *x*, die vertikale mit *y*. In unserem Fall ist *x* = 2 und *y* = 5 (Die Einheiten lassen wir hier der Einfachheit halber weg.). Die Steigung *m* unserer Strecke AB wird berechnet durch den Quotienten aus *y* und *x*:

$$m = \frac{y}{x}$$

Setzen wir die angegebenen Werte in die Formel ein, so erhalten wir den Wert 5/2 oder 2,5. Verlängern oder verkürzen wir die Strecke AB zu AB‘, wird das Steigungsdreieck entsprechend größer oder kleiner. Dabei ändert sich aber das Verhältnis *y/x* nicht; die Steigung hängt also nicht von der Größe des Dreiecks ab, so lange wir die Richtung bzw. Steilheit der Strecke beibehalten. Hätten wir ein Steigungsdreieck mit *x* = 1 benutzt, dann wäre *y = m · x* = 2,5 · 1 = 2,5. Die Steigung gibt also den *y*-Wert des Steigungsdreiecks an, wenn der *x*-Wert 1 ist.

Wenn die Ägypter beschreiben wollten, wie steil z. B. eine Pyramide ist, benutzten sie ebenfalls Steigungsdreiecke. Allerdings betrachteten sie nicht das Verhältnis *y/x*, sondern das Verhältnis *x/y*. Dieses Verhältnis ist umso kleiner, je steiler die Pyramide ist. Stellen wir uns das Dreieck aus Abb. 10 als Teil einer Pyramide vor, dann hätte bei den gleichen Maßen wie eben der ägyptische „Steilheitsgrad“ den Wert 2/5 = 0,4.

Nun benutzten die Ägypter für den *x*- und den *y*-Wert des Steigungsdreiecks unterschiedliche Einheiten: Der *x*-Wert wurde in „Handbreiten“ und der *y*-Wert in „Ellen“ angegeben. Dabei galt: 1 (königliche) Elle = 7 Handbreiten. Für das Dreieck aus Abb. 10 ergibt sich damit ein „Steilheitsgrad“ von $\frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5} = 2{,}8$. Dieser Steilheitsgrad (mit der Einheit Handbreite pro Elle) wurde von den Ägyptern als Seqed bezeichnet (s. Vokabel-Verzeichnis weiter unten).

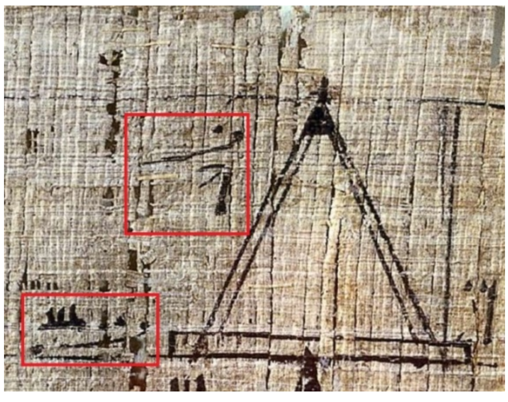


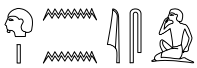
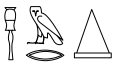
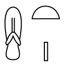
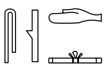
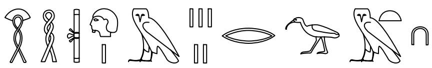
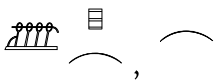
Abb. 11: Ahmoses Skizze zum Problem 56

Im Problem 56 berechnet Ahmose den „Steilheitsgrad“ einer Pyramide. In der Abb. 11 sind die Maße zu erkennen: Neben der Pyramide finden wir (hier durch einen roten Rahmen markiert) die hieratischen Zahlzeichen und . Sie stehen für die Zahl 200 + 50 = 250 und geben die Höhe der Pyramide an. Darunter erkennt man die Zahlzeichen und . Diese ergeben die Zahl 60 + 300 = 360, die Breite der Pyramidenbasis. Beide Angaben erfolgen hier in der Einheit Ellen; dies geht aus dem

Ende der zweiten Zeile des Aufgabentextes hervor.

Hieroglyphentext (nach [2] u. [3]):

Vokabeln

	*tp n njs*	Beispiel für das Berechnen (415*f*.6)
	*mr*	Pyramide (364)
	*ṯb.t*	Sohle, Standfläche (1023*f*)
	*wḫꜣ-ṯb.t*	Grundkante der Pyramide (228)
	*prj-m-wsj*	Höhe (einer Pyramide) (229)
	*sqd*	Seqed (s. o.), „Böschung“ (837)
	*wꜣḥ tp m* 5 *r gmj.t* 10	10 durch 5 teilen (vgl. Kapitel 10)
	*mḥ*	Elle (Längenmaß von etwa 52,5 cm) (374)
	*šsp*	Handbreite (1 *mḥ* = 7 *šsp*) (904)

Transliteration

tp-n-njs mr 360 *m wḫꜣ-ṯb.t* 250 *m prj-m-wsj n=f jmj*

rdj=k (Subjunktiv) *rḫ=j sḳd=f jrj.ḫr=k* $\overline{2}$ *n* 360 *ḫpr.ḫr=f m* 180 *jrj.ḫr=k wꜥḥ tp m* 250 *r gmj.t* 180 *ḫpr.ḫr* $\overline{2}$ $\overline{5}$ $\overline{50}$ *n mḥ*

jw mḥ pn šsp 7 *jrj.ḫr=k wꜥḥ-tp m* 7 [Rechnung s. u.] *sqd=f šsp* 5 $\overline{25}$

Übersetzung (mit ergänzenden Erläuterungen in grauer Farbe)

Beispiel für das Berechnen einer Pyramide 360 von der Basis (Grundkante) und 250 von der Höhe, die bei ihr ist.

Lass mich erfahren (wörtlich: Du sollst dafür sorgen, dass ich erfahre…) ihren Seqed. Du musst machen $\overline{2}$ von 360, wobei es (als) 180 ergeben muss. Du musst dividieren 180 durch 250 (wörtlich: 250 vervielfachen, um 180 zu finden), wobei es $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$ von einer Elle(!) ergeben muss.

Nun ist diese Elle 7 Handbreiten. Du musst mit 7 multiplizieren [wörtlich: 7 vervielfachen]:

Elle	Handbreite		Kommentar
1	7		
$\overline{2}$	3 $\overline{2}$	●	
$\overline{10}$	$\overline{\overline{3}}\ \overline{30}$		7/10 aus *n*/10-Tabelle
$\overline{5}$	1 $\overline{3}\ \overline{15}$	●	
$\overline{50}$	$\overline{10}\ \overline{25}$	●	$\overline{30}\ \overline{150} = \overline{25}$ s. u.
$\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$	**4 $\overline{2}\ \overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15}\ \overline{25}$ = 5 $\overline{25}$**		s. u.

Einer	150-tel
$\overline{30} + \overline{150}$	5 + 1
$\overline{25}$	**6**

Um 4 $\overline{2}\ \overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15}\ \overline{25}$ zu vereinfachen, betrachten wir zunächst nur den Term $\overline{2}\ \overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15}$. Das kgV dieser Nenner ist nämlich recht klein, nämlich 30. Würden wir $\overline{25}$ mit einbeziehen, hätte das kgV den Wert 150.

Einer	30-tel
$\overline{2}\ \overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15}$	15+10+3+2
1	**30**

Sein Seqed ist 5 $\overline{25}$ Handbreiten.

Es folgt die fehlende Rechnung für 180 : 250 bzw. 18 : 25.

	Ziel: 18		Kommentar
1	25		
$\overline{25}$	1		
$\overline{15}\ \overline{75}$	2	●	aus 2/*n*-Tabelle
$\overline{10}\ \overline{30}\ \overline{50}\ \overline{150}$	4		
$\overline{5}\ \overline{15}\ \overline{25}\ \overline{75}$	8		
$\overline{3}\ \overline{15}\ \overline{10}\ \overline{30}\ \overline{15}\ \overline{75}\ \overline{50}\ \overline{150}$ = $\overline{2}\ \overline{10}\ \overline{25}$	16	●	aus 2/*n*-Tabelle Vereinfachung s. u.
$\overline{2}\ \overline{10}\ \overline{15}\ \overline{25}\ \overline{75}$ = $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$	**18**		**Vereinfachung s. u.**

Vereinfachungen:

Einer	150-tel
$\overline{3}\ \overline{10}\ \overline{15}\ \overline{15}\ \overline{30}\ \overline{50}\ \overline{75}\ \overline{150}$	$50 + 15 + 10 + 10 + 5 + 3 + 2 + 1 = 96$
$\mathbf{\overline{2}\ \overline{10}\ \overline{25}}$	$\mathbf{96\ = 75 + 15 + 6}$

Einer	150-tel
$\overline{10}\ \overline{15}\ \overline{25}\ \overline{75}$	$15 + 10 + 6 + 2 = 33$
$\mathbf{\overline{5}\ \overline{25}}$	$\mathbf{33 = 30 + 3}$

Ahmose hat hier nur die Vorgehensweise zur Berechnung des Seqed skizziert: Er benennt die notwendigen Rechenschritte und gibt auch ihr Ergebnis an. Allerdings wird lediglich bei der zweiten Rechnung der Rechenweg skizziert. Auf weitere Hinweise z. B. in Hinblick auf Vereinfachungen verzichtet er vollends. Damit ist klar: Ahmose hat sich mit seinem Papyrus keinesfalls an Anfänger gewandt!

Aber ein Anfänger, das sind Sie, lieber Leser, nun sicherlich nicht mehr!

Quellenangaben

Text:

[1] https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057
[2] Henrietta Midonick: The Treasury of Mathematics, Penguin Books, Harmondsworth, Middlesex, England, 1965
[3] August Eisenlohr: Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des Britischen Museum), J. C. Hinrichs‘ Buchhandlung, Leipzig, 2. Auflage, 1891
[4] R. Hannig: Großes Handwörterbuch Ägyptisch-Deutsch – Marburger Edition – Verlag Philipp von Zabern, Mainz 2009
[5] David Reimer, Count like an Egyptian, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2014
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus_2/n_table

Bilder:

Einleitung:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hieroglyphische_Zahlschrift_entstanden_im_3_Jahrtausend_v_Chr_in_Karnak_Tempelanlage_in_Luxor_Agypten.png

Ausschnitte vom Papyrus Rhind (Titelseite, Abb. 1, 2, 7, 11):
https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057

Abb. 3: https://kryptografie.de/kryptografie/chiffre/hieratische-zahlen.htm

Abb. 4: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Pyramide-tronqu%C3%A9e-papyrus-Moscou_14.jpg

Abb. 5: Nach Abb. 2.3 aus [2]

Abb. 8: https://kb.osu.edu/bitstream/handle/1811/78222/OJSM_64_Fall2011_31.pdf